Bei welcher auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogenen Linie ist die Abscisse jedes Punktes die mittlere Proportionale zwischen dem Krümmungshalbmesser und einer gegebenen constanten Länge?

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Dr. phil. H. Wellmann.

Rostock.
Carl Boldt's Buchdruckerei.
1875.

Die gegebene constante Länge möge mit a, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ kurz mit p und ebenso $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit q bezeichnet werden; dann haben wir, da bei rechtwinkeligen Coordinaten für den Krümmungshalbmesser ϱ die Gleichung

$$\varrho = \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q}$$

gilt, die Bedingung der Aufgabe in folgender Gleichung:

$$a : x = x : \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q},$$

oder

$$a \cdot \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q} = x^2,$$

woraus

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{a}{x^2} \cdot (1 + p^2)^{3/2}$$

folgt.

Durch Trennung der Variabelen erhalten wir

$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{3/2}} = \frac{a \cdot dx}{x^2},$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = - \frac{a}{x} + C.$$

Quadriren wir beiderseits, so folgt

$$\frac{p^2}{1 + p^2} = \left(- \frac{a}{x} + C\right)^2;$$

$$p^2 = \left(- \frac{a}{x} + C\right)^2 \cdot (1 + p^2);$$

$$p^2 \cdot \left[1 - \left(-\frac{a}{x} + c\right)^2\right] = \left(-\frac{a}{x} + c\right)^2;$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{a}{x} + C}{\sqrt{1 - \left(C - \frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Dies integrirt giebt

$$y = \int \frac{-\frac{a}{x} + C}{\sqrt{1 - \left(C - \frac{a}{x}\right)^2}} dx + C_1;$$

$$= \int \frac{Cx - a}{\sqrt{x^2 - (Cx - a)^2}} dx + C_1 \qquad 1.)$$

als Gleichung der gesuchten Linie.

Da die Constante C_1 für die Natur der Linie ganz irrelevant ist, so wollen wir sie im Folgenden unberücksichtigt lassen. Anders ist es mit der zuerst auftretenden Constanten C. Durch sie wird der Werth des Integrals wesentlich beeinflußt; wir sehen sofort, daß sich dasselbe bedeutend vereinfacht, wenn wir $C = 1$ setzen, da alsdann das Quadrat von x wegfällt. Deshalb betrachten wir zuerst diesen einfacheren Fall und untersuchen hernach das Integral für ein von 1 verschiedenes C; die dahin gehörenden Möglichkeiten theilen wir naturgemäß in die beiden Fälle $C > 1$, $C < 1$. Wir werden sehen, daß den drei Fällen drei verschiedene Curvenarten entsprechen.

1. Fall: $C = 1$.

Für $C = 1$ gewinnt die Gleichung der gesuchten Linie die Gestalt

$$y = \int \frac{x - a}{\sqrt{x^2 - (x - a)^2}} dx;$$

$$= \int \frac{x - a}{\sqrt{x^2 - x^2 + 2ax - a^2}} dx;$$

$$= \int \frac{x - a}{\sqrt{2ax - a^2}}\, dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int \frac{x - a}{\sqrt{2x - a}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left[\int \frac{x}{\sqrt{2x - a}}\, dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{2x - a}} \right].$$

Für das erste Integral ergiebt sich

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x - a}}\, dx = \frac{2x\sqrt{2x - a}}{(2 + 1) \,.\, 2} + \frac{1}{3} \int \frac{a}{\sqrt{2x - a}}\, dx.$$

Substituiren wir dies, so folgt

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\frac{x}{3} \sqrt{2x - a} + \frac{a}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{2x - a}} - a \int \frac{dx}{\sqrt{2x - a}} \right];$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left[\frac{x}{3} \sqrt{2x - a} - \frac{2a}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{2x - a}} \right];$$

oder, da $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - a}} = \sqrt{2x - a}$ ist,

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{x}{3} \sqrt{2x - a} - \frac{2a}{3} \sqrt{2x - a} \right);$$

$$= \frac{1}{3} (x - 2a) \,.\, \sqrt{\frac{2x - a}{a}}. \qquad 2.)$$

Dieser erste Fall führt somit auf eine algebraische Curve, die wir unten näher kennen lernen werden.

2. Fall: $C > 1$.

Die Gleichung der Linie ist

$$y = \int \frac{Cx - a}{\sqrt{x^2 - (Cx - a)^2}}\, dx;$$

$$= \int \frac{Cx - a}{\sqrt{x^2 (1 - C^2) + 2\, Cax - a^2}}\, dx;$$

oder, wenn wir zunächst $1 - C^2$ kurz $= c$ setzen, wo also $c < 0$ ist,

$$y = \int \frac{Cx - a}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}} dx;$$

$$= C \int \frac{x}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}} dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}.$$

Für das erste Integral bekommen wir

$$\int \frac{x}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}} dx = \frac{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c}$$

$$- \frac{Ca}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + Cx^2}}.$$

Dies eingesetzt giebt

$$y = \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c} - \frac{C^2a}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}$$

$$- a \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}.$$

$$= \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c}$$

$$- \left(\frac{C^2a + ac}{c}\right) \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}.$$

Die Auflösung des letzten Integrals giebt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{Ca + cx}{\sqrt{C^2a^2 + a^2c}};$$

mithin bekommen wir für y:

$$y = \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c}$$

$$+ \frac{C^2a + ca}{c\sqrt{-c}} \arcsin \frac{Ca + cx}{\sqrt{C^2a^2 + a^2c}};$$

$$= \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c}$$

$$- \frac{C^2a + ca}{\left(-c\right)^{3/2}} \arcsin \frac{Ca + cx}{\sqrt{C^2a^2 + a^2c}};$$

oder, wenn wir für c wieder seinen Werth $1 - C^2$ einführen,

$$y = \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + (1 - C^2)x^2}}{1 - C^2} - \frac{a}{(C^2 - 1)^{3/2}} \arc \sin \frac{Ca + (1 - C^2)x}{a}. \qquad 3.)$$

3. Fall: $C < 1$.

Die Rechnung gestaltet sich hier im Anfang ebenso wie beim zweiten Fall; wir erhalten wieder

$$y = \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c} - \frac{Ca^2 + ac}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}.$$

Aber hier ist $c = 1 - C^2 > 0$ und dann folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \lg\left[Ca + cx + \sqrt{c} \,.\, \sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}\right],$$

und somit für y

$$y = \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}}{c} - \frac{C^2a + ac}{c^{3/2}} \cdot \lg\left[Ca + cx + \sqrt{c} \,.\, \sqrt{-a^2 + 2Cax + cx^2}\right];$$

oder, wenn wir wieder $c = 1 - C^2$ einsetzen,

$$y = \frac{C\sqrt{-a^2 + 2Cax + (1 - C^2)x^2}}{1 - C^2} - \frac{a}{(1 - C^2)^{3/2}} \lg\left[Ca + (1 - C^2)x + \sqrt{1 - C^2} \,.\, \sqrt{-a^2 + 2Cax + (1 - C^2)x^2}\right]. \qquad 4.)$$

Ueber die Art der gesuchten Linie gilt nach dem Vorigen also Folgendes. Nehmen wir die Integrationsconstante $C = 1$, so erhalten wir eine algebraische Curve; für $C > 1$ hängt sie von der Function arc sin ab und für $C < 1$ ist sie logarithmischer Natur. Jede dieser Curven leistet der in der Aufgabe gestellten Bedingung $a\varrho = x^2$ Genüge, wie sich herausstellt, wenn man die ziemlich umständlichen bezüglichen Rechnungen macht.

Zu eingehender Untersuchung laden die beiden letzteren Curvenarten so wenig ein, daß wir uns auf eine nähere Betrachtung der bei $C = 1$ resultirenden algebraischen Curve beschränken.

Die Gleichung der in Frage stehenden Curve,

$$y = \frac{1}{3}(x - 2a)\sqrt{\frac{2x - a}{a}},$$

geht durch beiderseitiges Quadriren über in

$$9ay^2 = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x - 4a^3; \qquad 5.)$$

während hierin y quadratisch vorkommt, tritt x in allen Potenzen von der dritten abwärts auf, deswegen läßt sich die Curve als eine verallgemeinerte Neil'sche Parabel bezeichnen.

Wir wollen zunächst versuchen, uns ein allgemeines Bild von ihrer Gestalt zu machen. Zweimal wird $y = 0$, nämlich für $x = 2a$ wegen des ersten Factors, und für $x = \frac{a}{2}$ wegen des zweiten. Für jedes $x < \frac{a}{2}$ ist y imaginär, also hat die Curve einen reellen Verlauf nur für $x \geqq \frac{a}{2}$. Der Punkt $x = \frac{a}{2}$ giebt den Scheitel $y = 0$; für jedes größere x existiren zwei entgegengesetzt gerichtete gleich große Ordinaten, welche nur einmal im Punkte $x = 2a$ wieder zusammen treffen, da für ihn $y = 0$ folgt; hier hat die Curve einen Doppelpunkt. Für $x = \infty$ wird auch $y = \infty$. Mithin gilt Folgendes: „Die in Frage stehende algebraische Curve verläuft symmetrisch zur Xaxe; im Punkte $x = \frac{a}{2}$ hat sie ihren Scheitel und bei $x = 2a$ einen Doppelpunkt, sie erstreckt sich mit beiden Zweigen in's Unendliche, welches sie mit unendlich großer Ordinate bei unendlich großer Abscisse erreicht". (Vgl Fig. 1.)

Ein Maximum (Minimum) findet statt für $x = a$, denn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x - a}{\sqrt{2x - a}}$$

verschwindet für $x = a$; y ist hier $= \pm \frac{a}{3}$.

Was die Richtung der Aeste im Unendlichen betrifft, so nähern sie sich asymptotisch einer Parallelen der Yaxe, denn für $x = \infty$ haben wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x - a}{\sqrt{2x - a}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2x - a}}} = \infty,$$

und $\tang \varphi$ ist ∞ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Die Curve zeichnet zwei Punkte der Abscissenaxe aus und läßt sie besonders geeignet scheinen, als Coordinatenanfangspunkte zu dienen; es sind der Scheitel und der Doppelpunkt. Verschieben wir den Anfangspunkt in den Scheitel, d. h. setzen wir $x + \frac{a}{2}$ statt x ein, so bekommen wir

$$y = \frac{1}{3}\left(x + \frac{a}{2} - 2a\right) \cdot \sqrt{\frac{2x + a - a}{a}};$$

$$= \frac{1}{3}\left(x + \frac{3a}{2}\right)\sqrt{\frac{2x}{a}}. \qquad 6.)$$

Die Gleichung möge die Scheitelgleichung der Curve heißen.

Machen wir den Doppelpunkt zum Coordinatenanfangspunkt, was wir durch Einsetzen von $x + 2a$ statt x erreichen, so folgt

$$y = \frac{1}{3}(x + 2a - 2a) \cdot \sqrt{\frac{2(x + 2a) - 2a}{a}};$$

$$= \frac{1}{3} x \sqrt{\frac{2x + a}{a}}. \qquad 7.)$$

Wir wollen diese Gleichung als Doppelpunktsgleichung bezeichnen.

Mehr als diese Transformationen nützt die Polargleichung der Curve, uns einige Eigenschaften derselben erkennen zu lassen. Um sie zu gewinnen, setzen wir in der quadrirten Scheitelgleichung

$$18ay^2 = 4x^3 - 12ax^2 + 9ax$$

$x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ein; das giebt

$$18ar^2\sin^2\varphi = 4r^3\cos^3\varphi - 12ar^2\cos^2\varphi + 9a^2r\cos\varphi;$$

$$18ar\sin^2\varphi = 4r^2\cos^3\varphi - 12ar\cos^2\varphi - 9a^2\cos\varphi;$$

$$12ar(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + 6ar\sin^2\varphi = 4r^2\cos^3\varphi + 9a^2\cos\varphi;$$

$$4r^2\cos^3\varphi - (12a + 6a\sin^2\varphi)\, r + 9a^2\cos\varphi = 0;$$

$$r^2 - \frac{12a + 6a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi}\, r + \frac{9a^2\cos\varphi}{4\cos^3\varphi} = 0;$$

$$r = \frac{6a + 3a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi}$$

$$\pm\sqrt{\frac{36a^2 + 36a^2\sin^2\varphi + 9a^2\sin^4\varphi}{16\cos^6\varphi} - \frac{9a^2\cos\varphi}{4\cos^3\varphi}};$$

$$= \frac{6a + 3a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi}$$

$$\pm\sqrt{\frac{36a^2 + 36a^2\sin^2\varphi + 9a^2\sin^4\varphi - 36a^2\cos^4\varphi}{4\cos^3\varphi}};$$

$$= \frac{6a + 3a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi}$$

$$\pm\sqrt{\frac{36a^2 + 36a^2\sin^2\varphi + 9a^2\sin^4\varphi - 36a^2(1 - \sin^2\varphi)^2}{4\cos^3\varphi}};$$

$$= \frac{6a + 3a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi}$$

$$\pm\sqrt{\frac{36a^2+36a^2\sin^2\varphi+9a^2\sin^4\varphi-36a^2+72a^2\sin^2\varphi-36a^2\sin^4\varphi}{4\cos^3\varphi}};$$

$$= \frac{6a + 3a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi} \pm\sqrt{\frac{108a^2\sin^2\varphi - 27a^2\sin^4\varphi}{4\cos^3\varphi}}; \quad 8.)$$

$$= \frac{6a + 3a\sin^2\varphi}{4\cos^3\varphi} \pm \frac{3a\sin\varphi}{4\cos^3\varphi} \cdot \sqrt{12 - 3\sin^2\varphi};$$

$$= \frac{3a}{4\cos^3\varphi} \cdot \left(2 + \sin^2\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{12 - 3\sin^2\varphi}\right);$$

$$= \frac{3a}{4\cos^3\varphi} \cdot \left(2 + \sin^2\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{9 + \cos^2\varphi}\right).$$

Jeder vom Scheitel oder Pol ausgezogene Strahl trifft mithin die Curve in zwei Punkten, deren Entfernungen vom Pol aus der vorstehenden quadratischen Gleichung sich ergeben; mit andern Worten: nach jeder Richtung vom Pol aus haben wir zwei Leitstrahlen r und r' mit den in der vorstehenden Gleichung ausgedrückten Längen; wir bezeichnen sie als conjugirte Leitstrahlen.

Auch bei dieser Darstellung ergiebt sich leicht die symmetrische Lage der Curve gegen die Xaxe, das Vorhandensein eines Doppelpunkts, u. s. w.

Auf eine interessante Relation werden wir geführt, wenn wir zwei conjugirte Werthe r und r' multipliciren.

Wir benutzen dazu Gleichung 8.) und erhalten

$$rr' = \frac{36 + a^2 36a^2\sin^2\varphi + 9a^2\sin^4\varphi}{16\cos^6\varphi}$$

$$- \frac{108a^2\sin^2\varphi - 27a^2\sin^4\varphi}{16\cos^6\varphi};$$

$$= \frac{36a^2 - 72a^2\sin^2\varphi + 36a^2\sin^4\varphi}{16\cos^6\varphi};$$

$$= \frac{36a^2 \cdot (1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)}{16\cos^6\varphi};$$

$$= \frac{9a^2\ (1 - \sin^2\varphi)^2}{4\cos^6\varphi};$$

$$= \frac{9a^2}{4\cos^2\varphi};$$

$$= \left(\frac{3a}{2\cos\varphi}\right)^2; \qquad 9.)$$

und hieraus

$$r\cos\varphi \cdot r'\cos\varphi = \left(\frac{3a}{2}\right)^2. \qquad 10.)$$

$\frac{3a}{2}$ ist nichts anderes als die Entfernung des Doppelpunkts vom Scheitel, welche Strecke etwa als der Durchmesser der Curve bezeichnet werden möge; ferner sind $r \cos\varphi$ und $r' \cos\varphi$ die Projectionen zweier conjugirter Radien, d. h. die Abscissen der betr. Curvenpunkte; darum gilt der merkwürdige Satz: „Das Rechteck aus den Abscissen zweier conjugirter Curvenpunkte ist gleich dem Quadrat des Durchmessers".

Folgende Ausdrucksweise desselben Satzes enthält Gl. 9.): „Errichtet man im Doppelpunkte eine Senkrechte zur Xaxe, so ist der zwischen ihr und dem Scheitel liegende Abschnitt jedes Strahls die mittlere Proportionale zwischen den beiden Radienvectoren, welche dem Strahle angehören".

Mit Hülfe dieser Beziehung können wir, wenn ein Curvenpunkt gegeben ist, leicht den zugehörigen construiren. Die Curve trennt sich dabei in die Schleife und den übrigen Theil derart, daß jedem Punkt der Schleife ein Punkt des übrigen Curventheils conjugirt ist, und sich demnach, wenn der eine Theil gegeben ist, der andere ohne Mühe finden läßt.

Derselbe Satz macht ferner die Angabe mehrerer weiterer Beziehungen leicht, von denen wir nur die folgenden erwähnen. Mit Rücksicht auf Fig. 1. schreiben wir Gleichung 9.) so:

$$AR : AS = AS : AT.$$

Dann folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{AR}{AT} &= \frac{(AS)^2}{(AT)^2}; \\ &= \frac{(AR)^2}{(AS)^2}; \\ \text{und} \quad \frac{AT}{AR} &= \frac{(AT)^2}{(AS)^2}; \end{aligned}\right\} \quad 11.)$$

d. h.: „Ein Leitstrahl verhält sich zu seinem conjugirten wie sein Quadrat zum Quadrat des Durchmessers".

Ferner gilt (siehe Fig. 1.)

$$y : SO = SO : y';$$
$$yy' = (SO)^2;$$
$$= (AS)^2 - (AO)^2;$$

mithin: „Das Rechteck aus den Ordinaten zweier conjugirter Curvenpunkte ist gleich dem Rechtecke aus den zugehörigen Leitstrahlen, vermindert um das Quadrat des Durchmessers".

Aus

$$AR : AS = AS : AT$$

folgt:

$$(AS - AR) : AR = (AT - AS) : AS;$$

oder

$$RS : AR = ST : AS;$$

$$RS : ST = AR : AS;$$

$$\left.\begin{aligned} &= AM : AO; \\ &= AO : AN. \end{aligned}\right\} \qquad 12.)$$

Nennen wir RT eine Curvensehne, auf welcher das Loth im Doppelpunkte zwei Abschnitte erzeugt, so gilt von diesen also folgendes: „Ein Abschnitt einer Sehne verhält sich zum anderen wie die Abscisse des ihm zugehörigen Curvenpunktes zum Durchmesser".

Wir gehen jetzt zur Aufsuchung der Evolute unserer Curve über.

Die stärkste Krümmung hat die Curve offenbar im Scheitel; für ihn ist $\varrho = \frac{a}{4}$ und zwar liegt der Krümmungsmittelpunkt auf der Abscissenaxe. Es erscheint passend, diesen Punkt als Coordinatenanfangspunkt der Evolute zu wählen, während andrerseits ein zweiter Punkt als solcher günstig erscheint; es ist der Axenpunkt, für welchen die Curve ein Maximum und Minimum hat, für den also die Evolute eine Doppeltangente besitzen muß. Für diesen Punkt heißt die Curvengleichung

$$y = \frac{1}{3}(x - a)\sqrt{\frac{2x + a}{a}};$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}}(x - a)\sqrt{2x + a}.$$

Daraus folgt für den ersten Differentialquotienten

$$p = \frac{1}{3\sqrt{a}}\left(\sqrt{2x + a} + (x - a)\frac{1}{\sqrt{2x + a}}\right);$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}} \cdot \frac{2x + a + x - a}{\sqrt{2x + a}};$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2x + a}};$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2ax + a^2}};$$

und ebenso für den zweiten:

$$q = \frac{\sqrt{2ax + a^2} - \frac{ax}{\sqrt{2ax + a^2}}}{2ax + a^2};$$

$$= \frac{2ax + a^2 - ax}{\left(2ax + a^2\right)^{3/2}};$$

$$= \frac{ax + a^2}{\left(2ax + a^2\right)^{3/2}}.$$

Für die Abscisse ξ des Krümmungsmittelpunktes erhalten wir demnach

$$\xi = x - \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2ax + a^2}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{2ax + a^2}}}{\frac{ax + a^2}{\left(2ax + a^2\right)^{3/2}}}$$

$$= x - \frac{2ax + a^2 + x^2}{ax + a^2} \cdot x;$$

$$= x - \frac{x + a}{a} \cdot x;$$

$$= - \frac{x^2}{a}. \qquad 13.)$$

Diese an die ursprüngliche Bedingung unserer ganzen Aufgabe lebhaft erinnernde Gleichung giebt uns den Satz: „Die Abscisse eines Curvenpunktes ist die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des zugehörigen Evolutenpunktes und einer gegebenen constanten Länge a". Das negative Vorzeichen bezieht sich auf die Lage der Evolute zum Coordinatensystem.

Als Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes ergiebt sich ferner:

$$\eta = y + \frac{1 + \frac{x^2}{2ax + a^2}}{\frac{ax + a^2}{\left(2ax + a^2\right)^{3/2}}};$$

$$= y + \frac{x^2 + 2ax + a^2}{a(x + a)} \cdot \sqrt{2ax + a^2};$$

$$= y + \frac{x + a}{a} \sqrt{2ax + a^2};$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}}(x - a)\sqrt{2x + a} + \frac{x+a}{a}\sqrt{2ax + a^2};$$

$$= \sqrt{\frac{2x + a}{a}} \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{a}{3} + x + a\right);$$

$$= \sqrt{\frac{2x + a}{a}} \cdot \frac{4x + 2a}{3};$$

$$= \frac{2\left(2x + a\right)^{3/2}}{3\sqrt{a}}. \qquad 14.)$$

Ein Vergleich zwischen den Ordinaten der Curve und denen ihrer Evolute giebt

$$\eta = \frac{4x + 2a}{x - a} \cdot y,$$

eine Beziehung, die immerhin erwähnenswerth ist, da sich die Ordinaten der einen Linie durch die der anderen rationell ausdrücken.

Substituiren wir in der vorigen Gleichung für x seinen Werth

$$x = \sqrt{-a\xi},$$

so erhalten wir

$$\eta = \frac{2\left(2\sqrt{-a\xi} + a\right)^{3/2}}{3\sqrt{a}} \qquad 15.)$$

als Gleichung der Evolute.

Auch ohne eingehende Discussion dieser Gleichung erkennen wir, daß die Evolute gegen die Xaxe symmetrisch liegt, daß sie sich mit ihren beiden Zweigen in's Unendliche erstreckt, daß sie einen Rückkehrpunkt hat u. s. w. Bezogen auf letzteren als Anfangspunkt, hat sie die Gleichung

$$\eta = \frac{2a}{3} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\xi}{a}}\right)^{3/2},$$

doch wird man weder hier noch bei den beiden für die ursprüngliche Curve in Anwendung gebrachten rechtwinkeligen Coordinatensystemen zu Sätzen von Interesse geführt.

Den Verlauf der Evolute zeigt Fig. 2.

Ausgehend von der ursprünglichen Gleichung

$$y = \frac{1}{3}(x - 2a)\sqrt{\frac{2x - a}{a}}$$

der Curve wenden wir uns zu einer Betrachtung ihrer Tangente, Normale, Subnormale und Subtangente.

Für die Länge der Tangente (zwischen Berührungspunkt und Xaxe) gilt die Gleichung

$$Tg = \frac{y\sqrt{1 + p^2}}{p},$$

also ist in diesem Falle

$$Tg = \frac{y\sqrt{1 + \frac{x^2 - 2ax + a^2}{2ax - a^2}}}{\frac{x - a}{\sqrt{2ax - a^2}}};$$

$$= y\,\frac{x}{x - a};$$

oder

$$Tg \,.\, (x - a) = yx; \qquad 16.)$$

d. h.: „Das Rechteck aus Abscisse und Ordinate eines Curvenpunktes ist gleich dem Rechtecke aus der Tangente und der um die constante Länge a verminderten Abscisse".

Für die Länge der Normale erhalten wir nach der Gleichung

$$\text{Norm.} = y\sqrt{1+p^2}$$

$$\text{Norm.} = y \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 - 2ax + a^2}{2ax - a^2}};$$

$$= y\,\frac{x^2}{\sqrt{2ax - a^2}};$$

oder durch Einsetzung des Werthes von y aus der Curvengleichung

$$\text{Norm.} = \frac{(x - 2a)\,x}{3a}. \qquad 17.)$$

Ferner folgt für die Subnormale, deren Länge allgemein die Gleichung

$$\text{Subnorm.} = yp$$

angiebt,

$$\text{Subnorm.} = y \cdot \frac{x - a}{\sqrt{2ax - a^2}},$$

oder, wenn wir auch hier die Curvengleichung benutzen,

$$\text{Subnorm.} = \frac{(x - 2a)\,(x - a)}{3a}. \qquad 18.)$$

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß ein Vergleich von Normale und Subnormale auf einen Satz führen muß, ganz analog dem bei der Tangente angeführten; er ist in der Gleichung

$$\text{Norm.} : \text{Subnorm.} = x : x - a$$

enthalten.

Für die Subtangente schließlich resultirt wegen

$$\text{Subtg.} = \frac{y}{p};$$

$$\text{Subtg.} = \frac{\frac{1}{3}(x - 2a)\sqrt{\frac{2x - a}{a}}}{\frac{x - a}{\sqrt{2ax - a^2}}};$$

$$= \frac{(x - 2a) \cdot (2x - a)}{3(x - a)}. \qquad 19.)$$

Bei Benutzung anderer Coordinatensysteme wird man auf nichts neues geführt, außer daß man bei der Wahl des Doppelpunktes als Anfangspunkt eine Beziehung leichter erkennt, die sich in den vorstehenden Gleichungen nicht so offen zeigt. Für die Normale und Subnormale erhält man dann nämlich

$$\text{Norm.} = \frac{x(x + 2a)}{3a};$$

$$\text{Subnorm.} = \frac{x(x + a)}{3a};$$

mithin folgt

$$\text{Norm.} - \text{Subnorm.} = \frac{x}{3}; \qquad 20.)$$

oder: „Der Unterschied zwischen Normale und Subnormale eines Curvenpunktes ist gleich dem dritten Theil der zugehörigen Abscisse".

Wir schließen hiermit die Betrachtung der ganzen Curve und gehen zur Lösung einiger Fragen, die für den geschlossenen Curventheil zwischen Scheitel und Doppelpunkt nahe liegen.

Was zunächst die Länge L eines Curvenastes zwischen Scheitel und Doppelpunkt betrifft, so finden wir

$$L = \int_0^{3a/2} dx \sqrt{1 + p^2}.$$

$$= \int_0^{3a/2} dx \sqrt{1 + \frac{x^2 - ax + \frac{a^2}{4}}{2ax}};$$

$$= \int_0^{3a/2} dx \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{2ax}}.$$

Da nun

$$\int dx \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{2ax}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left(\int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{a}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx \right),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{a}{2} \cdot 2\, x^{\frac{1}{2}} \right)$$

ist, so folgt für das genannte Bogenstück

$$L = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{3a}{2}}}{3} + a \sqrt{\frac{3a}{2}} \right);$$

$$= 2a \sqrt{\frac{3a/2}{2a}};$$

$$= a \sqrt{3}. \qquad 21.)$$

Die Länge a verhält sich also zur Curvenstrecke L wie $1 : \sqrt{3}$; dasselbe Verhältniß findet statt zwischen der Curvenstrecke und der Länge 3a, es ist

$$a : L = L : 3a;$$

d. h.: „Die rectificirte Curvenstrecke zwischen Scheitel und Doppelpunkt ist die mittlere Proportionale zwischen der constanten Länge a und ihrem Dreifachen". Oder mit andern Worten: „Das Quadrat über der rectificirten Curvenstrecke zwischen Scheitel und Doppelpunkt ist das Dreifache des Quadrats der gegebenen Länge a". —

Wir wollen jetzt die Coordinaten des Schwerpunktes für den genannten Ast aufsuchen. Bezeichnet L die Länge einer homogenen Curvenstrecke, so hat man zur Bestimmung ihrer Schwerpunktscoordinaten (x_1 y_1) die Gleichung

$$Lx_1 = \int x ds;$$

$$Ly_1 = \int y ds;$$

also hier, da $ds = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{2ax}} dx$ ist,

$$Lx_1 = \int_0^{3a/2} \frac{x^2 + ax/_2}{\sqrt{2ax}};$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left(\int_0^{3a/2} x \, dx + \frac{a}{2}\int_0^{3a/2} x^{\frac{1}{2}} \, dx\right);$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{a}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)_{x = \frac{3a}{2}};$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{28}{45} \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{5}{2}},$$

und hieraus durch Division mit $L = a\sqrt{3}$

$$x_1 = \frac{7}{10} a. \qquad 22.)$$

Ferner folgt

$$Ly_1 = \int y ds = \int_0^{3a/2} \frac{1}{3}\left(x - \frac{3a}{2}\right)\sqrt{\frac{2x}{a}}$$

$$\cdot \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{2ax}} dx;$$

$$= \frac{1}{3a} \int_0^{3a/2} \left(x^2 - \frac{ax}{2} - \frac{3a^2}{4}\right) dx;$$

$$= \frac{1}{3a} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{4} - \frac{3a^2x}{4}\right)_{x = \frac{3a}{2}};$$

$$= -\frac{3a^2}{16};$$

also $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{16} a,$ 23.)

wobei das negative Zeichen irrelevant ist.

Wir fanden $L = a\sqrt{3}$, also folgt

$$L = 16 y_1; \qquad 24.)$$

„die Curvenstrecke zwischen Scheitel und Doppelpunkt ist das 16fache der Ordinate ihres Schwerpunkts".

Für den Flächeninhalt F des geschlossenen Curventheils erhalten wir

$$\frac{1}{2} F = \int_0^{3a/2} \frac{1}{3}\left(x - \frac{3a}{2}\right) \sqrt{\frac{2x}{a}}\, dx,$$

oder, um zu einem positiven Resultate zu gelangen,

$$\frac{1}{2} F = \int_{3a/2}^{0} \frac{1}{3}\left(x - \frac{3a}{2}\right) \sqrt{\frac{2x}{a}}\, dx;$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{3a/2}^{0} x \sqrt{x}\, dx - \sqrt{\frac{a}{2}} \int_{3a/2}^{0} \sqrt{x}\, dx.$$

Unbestimmte Integration giebt für die rechte Seite

$$\frac{2\sqrt{2}}{15\sqrt{a}}\, x^2 \sqrt{x} - \frac{\sqrt{2a}}{3}\, x \sqrt{x};$$

folglich erhält man bei Einsetzung der Grenzen

$$\frac{1}{2} F = -\frac{3\sqrt{3}}{10}\, a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, a^2;$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{5}\, a^2;$$

und $$F = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, a^2. \qquad 25.)$$

$$= 0{,}69282\, a^2.$$

Für die Länge L eines Astes fanden wir $L = a\sqrt{3}$, es ist also

$$F = L \,.\, \frac{2}{5}\, a; \qquad 26.)$$

d. h.: „Der Inhalt der Schleife ist gleich dem Rechteck aus der rectificirten Curvenstrecke L und $\frac{2}{5}$ der constanten Länge a".

Was den Schwerpunkt dieser Fläche anbetrifft, so liegt er natürlich auf der Xaxe, es ist nur seine Abscisse x_2 zu suchen. Diese ist dieselbe wie die Schwerpunktsabscisse der halben Schleife $\left(\frac{1}{2} F = f\right)$ zwischen Curve und Xaxe, für welches Stück es auch eine Schwerpunktsordinate y_2 giebt. Beide Größen erhalten wir mittelst der Gleichungen

$$fx_2 = \int yx\, dx;$$

$$fy_2 = \tfrac{1}{2} \int y^2 dx.$$

Es ergiebt sich

$$fx_2 = \int_{3a/2}^{0} \frac{1}{3}\left(x - \frac{3a}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{2x}{a}}\; x \,.\, dx;$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} \int_{3a/2}^{0} \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{3ax^{\frac{3}{2}}}{2}\right) dx;$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{2}{7}\, x^{\frac{7}{2}} - \frac{3}{5}\, ax^{\frac{5}{2}}\right)_{x=-\frac{3a}{2}};$$

$$= \frac{1}{70} \cdot 3^{\frac{5}{2}} \,.\, a^3;$$

und daraus durch Division mit $f = \frac{\sqrt{3}}{5}\, a^2$

$$x_2 = \frac{9}{14}\, a. \qquad 27.)$$

Ferner finden wir

$$fy_2 = \int_{3a/2}^{0} y^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{3a/2}^{0} \frac{x^2 - 3ax + \frac{9a^2}{4}}{9} \,.\, \frac{2x}{a}\, dx;$$

$$= \frac{1}{9} \int_{3a/2}^{0} \left(\frac{x^3}{a} - 3x^2 + \frac{9ax}{4}\right) dx;$$

$$= \left(\frac{x^4}{36a} - \frac{x^3}{9} + \frac{ax^2}{8} \right)_{x = -\frac{3a}{2}};$$

$$= \frac{3}{64} a^3;$$

und hieraus

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \frac{\sqrt{3}\ .\ 5}{64}\ a; \\ &= \frac{5}{64}\ L. \end{aligned} \right\} \quad 28.)$$

Ein Vergleich dieser Ordinate y_2 mit der vorhin gefundenen Schwerpunktsordinate y_1 der Curve giebt

$$y_1 : y_2 = 4 : 5. \qquad 29.)$$

Wenn die Curve um die Xaxe sich dreht, so wird ihr geschlossener Theil einen geschlossenen Rotationskörper bilden, dessen Oberfläche und Inhalt wir noch berechnen wollen. Für die Oberfläche O erhalten wir

$$O = 2\pi \int_{3a/2}^{0} y \sqrt{1+p^2}\, dx;$$

$$= 2\pi \int_{3a/2}^{0} \frac{1}{3} \left(x - \frac{3a}{2} \right) \sqrt{\frac{2x}{a}} \cdot \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{2ax}}\, dx;$$

$$= \frac{2\pi}{3a} \int_{3a/2}^{0} \left(x - \frac{3a}{2} \right) \left(x + \frac{a}{2} \right) dx;$$

$$= \frac{2\pi}{3a} \int_{3a/2}^{0} \left(x^2 - ax - \frac{3a^2}{4} \right) dx.$$

Da nun

$$\int \left(x^2 - ax - \frac{3a^2}{4} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} - \frac{3a^2x}{4}$$

ist, so folgt

$$O = \frac{2\pi}{3a}\left(-\frac{\frac{27}{8}a^3}{3} + \frac{\frac{9}{4}a^3}{2} + \frac{\frac{9}{2}a^3}{4}\right);$$

$$= 2\pi\left(-\frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{8}a^2\right);$$

$$= \frac{3}{4}\pi a^2;$$

$$= 3\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi. \qquad 30.)$$

In Worten heißt dies: „Die Oberfläche des Körpers, den die Rotation der Curve zwischen Scheitel und Doppelpunkt erzeugt, ist das Dreifache eines mit der halben gegebenen Constanten a als Halbmesser beschriebenen Kreises“.

Der Schwerpunkt dieser Rotationsfläche befindet sich natürlich auf der Xaxe, hat also die Ordinate $y_3 = 0$; für die Abscisse x_3 haben wir:

$$Ox_3 = 2\pi \int_{3a/2}^{0} xy\sqrt{1+p^2}\,dx;$$

$$= \frac{2\pi}{3a}\int_{3a/2}^{0}\left(x^3 - ax^2 - \frac{3a^2x}{4}\right)dx;$$

$$= \frac{2\pi}{3a}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3} - \frac{3a^2x^2}{8}\right)_{x=-\frac{3a}{2}};$$

$$= \frac{15}{32}a^3\pi;$$

und daraus dann

$$x_3 = \frac{5}{8}a. \qquad 31.)$$

Was das Volumen V dieses Rotationskörpers betrifft, so haben wir für dasselbe die Gleichung

$$V = \pi \int_0^{3a/2} y^2 \, dx;$$

$$= \pi \int_0^{3a/2} \frac{1}{9} \left(x^2 - 3ax + \frac{9a^2}{4}\right) \frac{2x}{a} dx;$$

$$= \frac{\pi}{9a} \int_0^{3a/2} \left(2x^3 - 6ax^2 + \frac{9a^2x}{2}\right) dx;$$

oder wenn wir

$$\int \left(2x^3 - 6ax^2 + \frac{9a^2x}{2}\right) dx = \frac{x^4}{2} - 2ax^3 + \frac{9a^2x^2}{4}$$

einsetzen,

$$V = \frac{\pi}{9a} \cdot \left(\frac{81}{32} a^4 - \frac{27}{4} a^4 + \frac{81}{16} a^4\right);$$

$$= \pi \cdot \frac{3}{32} a^3;$$

$$= \frac{3}{4} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3; \qquad 32.)$$

Es liegt nahe, diesen Werth mit

$$\frac{4}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi,$$

d. i. dem Inhalte einer Kugel vom Halbmesser $\frac{a}{2}$ in Beziehung zu bringen und dann beiden gegenüber den Werth $\left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi$ zu betrachten, der ihre mittlere Proportionale bildet und den πfachen Inhalt eines Würfels mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$ bezeichnet. Wir erhalten dann den merkwürdigen Satz: „Der πfache Würfel aus der halben constanten Länge a ist die mittlere Proportionale zwischen einer Kugel mit derselben Größe als Halbmesser und dem geschlossenen Theile des Rotationskörpers, den die Curve durch Drehung um die Xaxe erzeugt“.

Bezüglich des Schwerpunkts dieses Körpers gilt wieder, daß er auf der Xaxe liegt und also nur seine Abscisse x_4 zu berechnen ist; für dieselbe ergiebt sich

$$Vx_4 = \pi \int_0^{3a/2} y^2 x dx;$$

$$= \frac{\pi}{9a} \int_0^{3a/2} \left(2x^4 - 6ax^3 + \frac{9}{2} a^2 x^2\right) dx;$$

$$= \frac{\pi}{9a} \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{3ax^4}{2} + \frac{3a^2x^3}{2}\right)_{x=\frac{3a}{2}};$$

$$= \frac{9}{160} a^4 \pi.$$

Durch Division mit V folgt dann

$$x_4 = \frac{3}{5} a. \qquad 33.)$$

Vergleichen wir zum Schlusse noch die mit x_1 x_2 x_3 x_4 bezeichneten Schwerpunktsabscissen, für die sich so einfache Werthe ergaben, so finden wir

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{7}{10} a : \frac{9}{14} a : \frac{5}{8} a : \frac{3}{5} a$$

$$= 194 : 180 : 175 : 168.$$

Wir schließen hiermit die Untersuchung der Curve. Wir sehen, daß sie zu manchen interessanten Sätzen führt, oft zu solchen, welche dem Bedingungssatze, von welchem die ganze Untersuchung ihren Ausgang nahm, ähnlich sind, solchen nämlich, in denen von mittlerer Proportionale die Rede ist. Es ist zu bedauern, daß keiner derselben es uns möglich machte, die ganze Curve geometrisch zu construiren; daß die Construction eines Theils derselben aus einem gegebenen Theile keine Schwierigkeiten bereitet, wurde schon oben erwähnt.

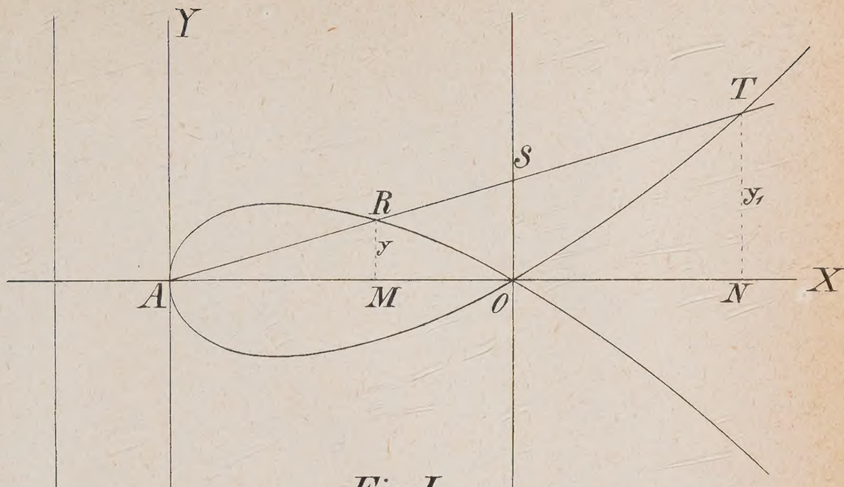


Fig. I.

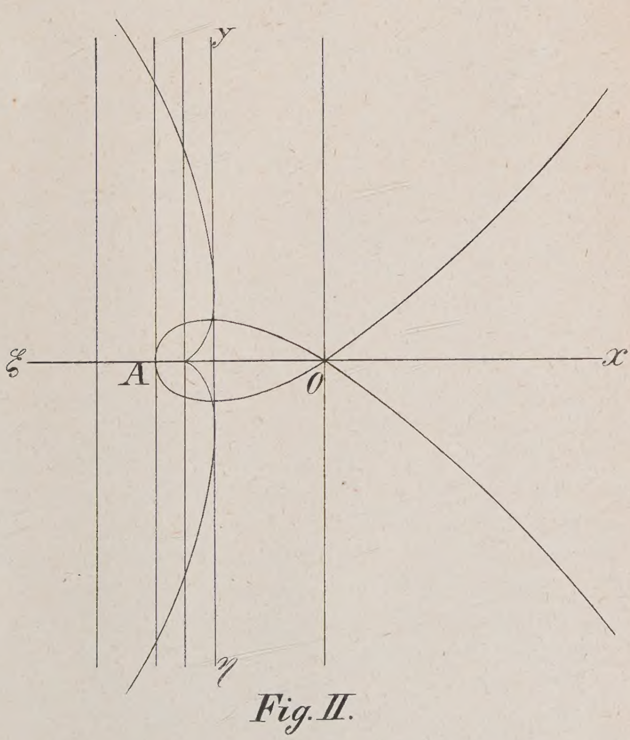


Fig. II.